Développement limités

1 - Développement limités au voisinage de 0 :

Déf : Soit f une fct définis dans un voisinage de 0, sauf peut être en 0. On dit que f admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe un intervalle I centré en 0 et des constantes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{R(f)} + \underbrace{x^n \varepsilon(x)}_{} \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

le polynôme $P(x) = R(f) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est dit partie régulière du D.L de f.

Ex : $f(x) = (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0.

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$a_0 = 1 \; ; \; a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \; ; \; a_1 = \alpha \; ; \dots ; \; a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Rq :

1) si une fct f admet un D.L au voisinage de 0, alors $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$ existe.

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de D.L au voisinage de 0, car $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Prop : Si f admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0, alors elle est unique.

Dém : Supposons que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

$\forall x \in I \setminus \{0\}$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

$$\Rightarrow (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \dots + (a_n - b_n) x^n + x^n (\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$$

$\forall x \in I \setminus \{0\}$

On fait tendre $x \to 0 \Rightarrow a_0 - b_0 = 0$

donc $(a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \dots + (a_n - b_n) x^n + x^n (\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$

ETUDIP.com

je simplifie par x : $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-1} + x^{n-1}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$

$x \to 0 \Rightarrow a_1 - b_1 = 0$ et ainsi de suite .... $a_n = b_n$

Corollaire : Supp que f admet un D.L à l'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

- Si f est pair : $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0$
- Si f est impair : $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = a_{2k} = 0$

f est pair $\Rightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1(x) + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots + (-1)^n a_n x^n + (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$$

$$= a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots + (-1)^n a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$$

avec $\varepsilon_1(x) = (-1)^n \varepsilon(-x) \underset{x \to 0}{\to} 0$

D'après l'unicité de D.L on a :

$a_1 = -a_1 \Rightarrow a_1 = 0$

$a_3 = -a_3 \Rightarrow a_3 = 0$

$\vdots$

$a_{2k+1} = -a_{2k+1} \Rightarrow a_{2k+1} = 0$

même chose pour f impair ($f(x) = -f(x)$)

Ex : Mq si f est continue en 0 et admet un D.L à l'ordre n

Alors f est dérivable en 0.

Proposition : (D.L par restriction)

Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ un D.L à l'ordre n au voisinage de 0 de f.

Son D.L à l'ordre $p \leq n$ est donné par $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + x^p \varepsilon_1(x)$

c-à-d on garde la partie de degré $\leq p$

Dém : (à faire à titre de Devoir)

Proposition : Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 donné par : $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $a_0 = f(0), \dots, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

ETUDUP .com

Dém : il résulte de la formule de Mac Laurin young et de l'unicité du développement limité.

Remarque : il existe une fct qui admet un D.L au voisinage de 0 sans que soit dérivable en ce point.

Ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin\frac{1}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$$

avec $\varepsilon(x) = x \sin\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ $\quad (0 \leqslant |x \sin\frac{1}{x^3}| \leqslant |x|)$

est un D.L de f à l'ordre 2 au voisinage de 0, mais f n'est pas dérivable en 0. En fait, elle n'est pas cont en 0

Exemples : (à retenir)

La proposition d'existence donne les D.L au voisinage de 0 suivants :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 +$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

2 - Opérations sur les D.L :

Proposition : Soient f et g deux fonctions admettant des D.L à l'ordre n au voisinage de 0. Alors $f+g$, fg admettent des D.L à l'ordre n. Il en est de même pour $\frac{f}{g}$ si $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$

ETUDUP .com

$f(x) = R^n(f) + x^n \varepsilon_1(x)$

$g(x) = R(g) + x^n \varepsilon_2(x)$

$f+g = \underbrace{R(f)+R(g)}_{R(f+g)} + x^n \varepsilon(x)$

La partie regulière du D.L de $f+g$ est la somme des parties régulières de f et g.

On obtient la partie regulière du D.L du produit fg en ne gardant dans le produit de parties regulières de f et g que les termes de degré $\leq n$

La partie regulière du D.L $\frac{f}{g}$ et le quotient à l'ordre n dans la division suivant les puissances croissantes de la partie regulière de f par la partie regulière de g.

Ex : (1) Donnons le D.L de la fct . $ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ à l'ordre 5 en vois de 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon_1(x) \quad [\varepsilon_1(x) = -\varepsilon(-x)]$$

$$ch x = \frac{1}{2}\left(2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\cdot\frac{x^4}{4!}\right) + x^5 \varepsilon(x)$$

$$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

D'une façon générale :

$$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

De même :

$$sh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

(2) Donner le D.L à l'ordre 2 au vois de 0 de $f(x) = \sqrt{1+x}\ \sin(x)$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}_{} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x}\ \sin(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

ETUDUP .com

Ex : Donner le D.L à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fct $f(x) = \tan x$

- En utilisant le Th d'existance
- " " la div suivant les puissances ↑

La proposition suivante va nous permettre de donner le D.L d'une fct composée

Prop : Soit f et g deux fct admettent au voisinage de 0 un D.L à l'ordre n. Si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ alors la fct fog admet aussi un D.L à l'ordre n au voisinage de 0. On obtient sa partie reguliere en substituant la partie reguliere de g dans la partie reguliere de f et on garde uniquement les termes de degré $\leq n$.

Ex : D.L à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $h(x) = \cos(\sqrt{1+x} - 1)$

$f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sqrt{1+x} - 1$ $= fog(x)$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x x^2 + \frac{1}{16}x^3}_{X} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right)^2 + x^3 \varepsilon(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

Ex de Devoir :

D.L à l'ordre 5 au voisinage de 0 dans la fonction

$f(x) = e^{\cos x}$ et $g(x) = \sqrt{\cos x}$

Prop : (Dérivation) Soit f une fct indifiniment dérivable ayant pour D.L à l'ordre n au voisinage de 0 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

alors : f' a pour D.L à l'ordre n-1 au voisinage de 0.

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$ c-à-d on dérive terme à terme la partie reguliere de f.

Proposition (Intégration) :

Soit f une fct indefinitivement dérivable ayant pour D.L à l'ordre (n-1) au voisinage de 0

ETUDUP.com

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}}_{} + \underbrace{x^{n-1} \varepsilon(x)}_{}$$

Le D.L d'une primitive F de f à l'ordre n est donné par :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

(intégre)

c-à-d on intègre terme à terme la partie régulière de f et on ajoute la constante $F(0)$

Ex : D.L à l'ordre n de $F(x) = \log(1+x)$ au voisinage de 0.

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}}_{} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$$F(x) = \underset{0}{F(0)} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

3 - Développement limités au voisinage d'un pt x_0 :

Déf : Soit f une fct définie ds un voisinage de x_0, sauf peut être en x_0. On dit que f admet un D.L à l'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe un intervalle I centré en x_0 et des cstes $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tq :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

$\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ avec $\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^n \varepsilon(x) = 0$

- Si on pose $X = x - x_0$, $x = X + x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(X + x_0)}_{g(X)} = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n + X^n \underbrace{\varepsilon(X + x_0)}_{\varepsilon_1(X)}$$

$X \to 0$, $\lim_{X \to 0} \varepsilon_1(X) = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
$x \to x_0$

C'est le D.L de la fct $g(X) = f(X + x_0)$ à l'ordre n au voisinage de 0.

En conclusion : le D.L de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre n s'obtient à partir de D.L de $g(X) = f(x_0 + X)$ à l'ordre n au voisinage de 0, on posons $X = x - x_0$

Ex : D.L à l'ordre n de $f(x) = e^x$ au voisinage de $x_0 = 1$

on pose : $X = x - 1$

$g(X) = f(X + 1)$ on va donner le D.L de g à l'ordre n au voisinage de 0

ETUDUP .com

$g(x) = e^{1+x} = e \cdot e^{x}$

$= e\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)\right]$

$= e\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right] + x^n \cdot \varepsilon_1(x)$

$\varepsilon_1(x) = e \cdot \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$f(x) = e\left[1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!}\right] + (x-1)^n \varepsilon_2(x)$

avec $\varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(x-1) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

* On obtient directement cette formule à partir :

$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + (x-1)^n \varepsilon(x)$

Déf : Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$

on dit que f admet D.L d'ordre n au voisinage de $+\infty$, s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tq :

$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$

• On pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) = g(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n + X^n \underbrace{\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}_{\varepsilon_1(x)}$

avec $\lim_{X \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$

En conclusion : le D.L de $f(x)$ à l'ordre n au voisinage de ∞ s'obtient à partir du D.L de $g(X) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0 à l'ordre n en posant $X = \frac{1}{x}$

Exercice : Ex : D.L à l'ordre 4 au voisinage de $\pm\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2(1+x^2)}$

Exemple : D.L à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + x + 1}$

$X = \frac{1}{x}$ $\quad g(X) = f\left(\frac{1}{X}\right) = X\sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + 1}$

$X \to 0^+$ $\quad = \sqrt{1 + X + X^2}$

$x \to +\infty$

on développe $g(X)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2

$* \quad = (1 + (X + X^2))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(X + X^2) - \frac{1}{8}(X + X^2)^2 + X^2 \varepsilon(X)$

$(1+Z)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}Z + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}Z^2 + Z^2 \varepsilon(Z)$

$Z = X + X^2 \xrightarrow[X \to 0]{} 0$

ETUDUP.com

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + x^2) - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^2}\varepsilon_1(x) \quad \cdot \lim_{x \to +\infty} \varepsilon_1(x) = 0$$

donc : $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_1(x)$

4 - Developpement limité généralisé :

Soit f une fct definie au vois de 0 sauf peut être on suppose que f n'admet pas un D.L à l'ordre n au vois de 0, mais il existe $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $x^\alpha f(x)$ admet ce D.L, on a alors :

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

soit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x))$

cette expression est appelée D.L généralisé de f à l'ordre n au vois de 0.

Ex : On considère $f(x) = \frac{1}{x(1-x)^2}$

f n'admet pas un D.L au vois de 0, car $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$

par contre $x f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ on admet (ici $\alpha = 1$)

$$x f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + (n+2)x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{x} + 2 + 3x + \dots + (n+1)x^{n-1} + \dots + (n+2)x^n + x^n\varepsilon(x)$

c'est le D.L généralisée de f au vois de 0 à l'ordre n.

5 - Applications :

a - Calcul des limites :

Cherchons $\lim_{x \to 0} \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{x^3 + x^4}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

$$1 - e^x = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$$

$$(1-e^x)(1-\cos x) = \frac{-x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$$

ETUDUP .com

$$\frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{x^3+x^4} = \frac{-\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x)}{x^3+x^4}$$

$$= \frac{-1/2+\varepsilon(x)}{1+x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2$$

On a developpé une fct au voisinage de 0 puisqu'on cherche la limite au voisinage de 0

Il faut tjr developpé à l'ordre le plus petit possible pour enlevé l'indétermination.

b - Détermination des asymptotes :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

on va montrer que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et on va étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Méthode classique :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \frac{1}{2}$ (à vérifier)

asymptote en $+\infty$ $\quad y = x + \frac{1}{2}$

Méthode de Vie :

on va developper f au voisinage de $+\infty$

on pose $X = \frac{1}{x}$ donc :

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}$$

$$= \frac{1}{|x|}\sqrt{1+(x+x^2)} = \frac{1}{x}\sqrt{1+(x+x^2)}$$

$$= \frac{1}{x}\left[1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)\right]$$

$$= \frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}x+x\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0^+}\varepsilon(x)=0$$

$$= \underbrace{x+\frac{1}{2}}_{y} + \frac{3}{8}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$$

$$f(x)-y = \frac{3}{8}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$$

ETUDUP.com

Par suite $y = x + \frac{1}{2}$ asymp en $+\infty$

en $+\infty$ le signe de la différence $f(x) - y$ est celui de $\frac{3}{8}\frac{1}{x}$ qui est positive. Donc f est au dessus de l'asympt

et encore plus..